

6. Записать формальное определение эргодичности и прокомментировать его.

Эргодичность

Пусть фазовый объем сохраняется, движение происходит в некоторой ограниченной области D с объемом V_D , $h(x)$ – некоторая функция. Введем формулы:

$$\bar{h}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t h(F^t(x)) dt,$$

$$\langle h \rangle = V_D^{-1} \int_D h(x) dV, \quad dV = dx_1, \dots, dx_n.$$

Будем называть $\bar{h}(x)$ – среднее по времени, а $\langle h \rangle$ – фазовое среднее.

Движение называется эргодическим, если для произвольной интегрируемой функции $h(x)$ и почти всех начальных условий x_0 справедливо равенство временных и фазовых средних:

$$\bar{h}(x_0) = \langle h \rangle. \quad (1)$$

Если равенство (1) выполняется для всех (или почти всех) фазовых траекторий динамической системы, то система называется эргодической.

В эргодической системе относительное время, проведенное фазовой траекторией внутри некоторой области, равно относительному объему этой области (независимо от выбора начальных условий). Таким образом, траектория эргодической системы будет равномерно и плотно заполнять всё фазовое пространство D .

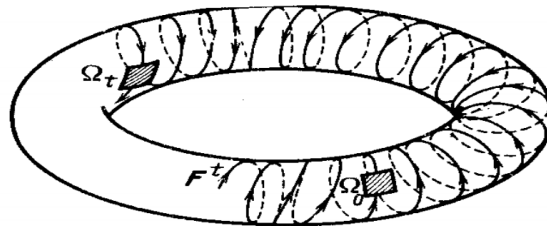


Рис. 1. Пример: квазипериодическое движение на поверхности тора (эргодическая траектория при иррациональном значении отношения частот).